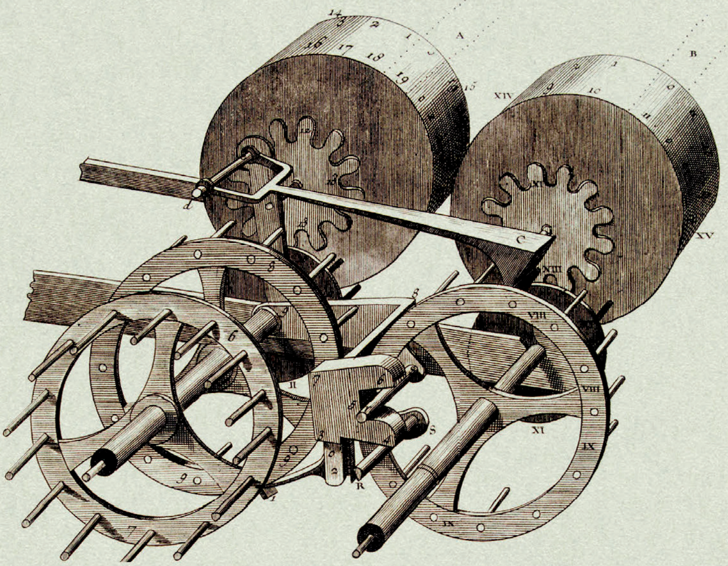
Sous la direction de

CHRISTIAN GILAIN
& ALEXANDRE GUILBAUD

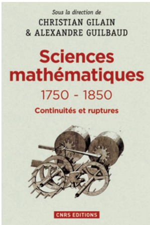
Sciences mathématiques 1750 - 1850

Continuités et ruptures



CNRS EDITIONS

Présentation de l'éditeur



Une tradition bien ancrée en histoire des mathématiques présente le passage du XVIIIe au XIXe siècle comme une rupture radicale et globale, en liaison avec les bouleversements socio-politiques induits par la Révolution française. Fruit du travail d'un groupe composé de nombreux historiens des sciences, cet ouvrage se propose de discuter cette présentation standard liée à la périodisation classique établissant vers 1800 l'entrée dans l'ère de la « modernité » mathématique.

Dans cette perspective, les contributions rassemblées ici abordent le développement de diverses sciences mathématiques, pures ou appliquées, entre le milieu du XVIIIe siècle et celui du XIXe, à la fois en France, lieu scientifique essentiel pour la période considérée, et dans d'autres pays, en particulier l'Allemagne et la Grande-Bretagne. Elles considèrent tout aussi bien les contenus des textes scientifiques que leurs contextes institutionnels, sociaux, culturels ou politiques.

Centrée sur l'analyse des continuités et des discontinuités sur le temps long de la période 1750-1850, cette étude met en évidence une complexité de dynamiques historiques et de temporalités bien éloignée de la dichotomie supposée entre les deux siècles.

Christian Gilain est professeur émérite et Alexandre Guilbaud maître de conférences à l'Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6). Ils sont tous deux membres de l'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche. Leurs principaux travaux portent, respectivement, sur l'histoire de l'analyse mathématique et sur les applications des mathématiques depuis le XVIIIe siècle.

Sciences mathématiques 1750-1850

Continuités et ruptures

Sous la direction de
Christian Gilain et Alexandre Guilbaud

Sciences mathématiques 1750-1850

Continuités et ruptures

CNRS ÉDITIONS

15, rue Malebranche – 75005 Paris

ISBN : 9782271088529

Sommaire

Un bilan historiographique

Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD

1. Une rupture radicale et globale ?

1.1. La construction de la rupture

Une tradition bien ancrée en histoire des mathématiques présente le passage du XVIII^e^ au XIX^e^ siècle comme une rupture radicale et globale. Encore récemment, la revue d'histoire des sciences *ISIS* [1] a publié un abondant dossier où cette thèse est développée de manière appuyée :

> « When viewed together, the papers combine to tell a coherent story about the rise and fall of Enlightenment mathematics and the emergence of the nineteenth century's "rigorous" approach. » [Alexander 2006a, p. 682]

Deux éléments essentiels de la thèse défendue dans ce dossier apparaissent dans la citation précédente : la rigueur est le critère fondamental opposant les mathématiques du XIX^e^ siècle à celles du siècle précédent et ce critère est non seulement mathématique mais culturel. Les mathématiques du XVIII^e^ siècle sont ainsi présentées comme les mathématiques « des Lumières », tirant leurs caractéristiques du mouvement philosophique et culturel éponyme :

> « enlightened mathematics was not rigorous. Strict mathematical rigor was a negative value in the mid-eighteenth-century world of the *Encyclopédie* because it was artificial and rigid » [Richards 2006, p. 703].

Les mathématiques du XVIII^e^ siècle sont considérées comme gouvernées par la seule valeur d'utilité, réduites à la recherche de résultats liés au monde physique, par contraste avec un XIX^e^ siècle où se développent les mathématiques pures, étudiées pour elles-mêmes, avec des préoccupations de fondements et de cohérence interne :

> « Eighteenth-century mathematicians were usually content to reach correct and useful results that would aid in the understanding of the natural world. [...] [They] generally did not worry too much about the logical niceties of their methods. The usefulness of the result was deemed proof enough that the method must be essentially correct. Mathematical rigor was deemed the province of unimaginative pedants.

1. Fondée par George Sarton, la revue *ISIS* est la plus ancienne (le numéro 1 a paru en 1913) et la plus célèbre des revues internationales d'histoire des sciences.

> But to their nineteenth-century successors this approach seemed dolefully inadequate. These new practitioners asserted that mathematics must be internally self-consistent, rigorous, and established on firm logical foundations. Only after a mathematical method was deemed secure under the field's own rigorous standards could it be "applied" to other fields. » [Alexander 2006b, p. 720]

Plusieurs des thèmes avancés dans ce dossier d'*ISIS* correspondent à des oppositions binaires entre les XVIIIe et XIXe siècles, qui remontent loin dans l'historiographie des mathématiques. Nous allons présenter quelques jalons essentiels de cette construction historiographique.

Des ouvrages classiques

Felix Klein, dans son ouvrage de référence sur l'histoire des mathématiques au XIXe siècle, avait posé les pierres essentielles de la construction historiographique d'une rupture radicale avec le siècle précédent [Klein 1926/1979] [2]. Selon lui, les mathématiques du XVIIIe siècle, très largement dominées par l'application du calcul différentiel et intégral en mécanique et en astronomie, sont caractérisées par « the powerful creations in which pure and applied mathematics united to answer the demands of the times » [*Ibid.*, p. 2], laissant à l'inverse peu de place au développement de travaux de mathématiques pures autonomes. Il affirme alors que : « The 19th century shows a totally different character. » [*Ibid.*]

Les mathématiques appliquées ne disparaissent pas [3], mais conquièrent rapidement de nouveaux territoires : signe de cette évolution, « the creation of the whole of "mathematical physics", our theoretical tool in all areas of physics except mechanics. » [*Ibid.*], un domaine nouveau que le mathématicien présente plus loin comme le résultat d'une double rupture, en physique, puis en mathématiques [4]. L'opposition entre les deux siècles se

2. Il s'agit d'un ouvrage publié de manière posthume à partir de conférences données par Felix Klein (volume 1 en 1926, volume 2 en 1927). Voir la notice biographique sur Klein (1849-1925), rédigée par R. Tobies, dans [Dauben & Scriba 2002].

3. « Of course applied mathematics did not come to a stop » [Klein 1926/1979, p. 2].

4. « Suddenly, in the first decades of the new century, a period of intense discovery dawned. It opened with optics. [...] These physical discoveries provided a strong stimulus to mathematical productivity ; for the confusing maze of these new ideas and theories urgently needed the ordering hand of the mathematician. » [*Ibid.*, p. 62-63] Dans cette citation, les découvertes physiques (« physical discoveries ») font référence, selon F. Klein [*Ibid.*, p. 62-63], à la découverte de lois expérimentales grâce auxquelles les mathématiques pourront être appliquées à de nombreux phénomènes physiques (en optique, électricité, magnétisme, etc.) dans les premières décennies du XIXe siècle. En ce sens, la création de la physique mathématique correspond donc d'après lui à l'extension du champ d'application des mathématiques aux phénomènes physiques non mathématisés au XVIIIe siècle, c'est-à-dire à tous les domaines de la physique de cette époque excepté celui de la mécanique (« all areas of physics except mechanics »), pour reprendre l'expression de F. Klein dans la citation.

manifeste aussi, et surtout, par la place nouvelle donnée, au XIXe siècle, aux mathématiques pures et à l'exigence de rigueur :

> « But now pure mathematics came forward mightily in two, equally significant, ways. Whole new areas were created, such as the theory of functions of a complex variable and projective geometry ; secondly, the inherited possessions of science were subjected to critical examination in answer to the reawakened feeling for rigor, which had been somewhat repressed by the 18th century, in its surfeit of new discoveries. » [*Ibid.*, p. 2-3]

Pour F. Klein, cette mutation intellectuelle est étroitement liée aux changements sociaux provoqués par la Révolution française : la démocratisation de l'accès aux sciences, la spécialisation scientifique, la professionnalisation de l'enseignement. Dans ce cadre, l'École polytechnique de Paris, à laquelle il consacre l'essentiel de son chapitre II, apparaît emblématique de tous ces changements, avec une formation des cadres civils et militaires sur la base d'une éducation mathématique de haut niveau. F. Klein souligne que l'École polytechnique, par ses enseignants et ses anciens élèves, est à l'origine de presque toutes les grandes nouveautés scientifiques qui surviennent en France dans les premières décennies du XIXe siècle. C'est le cas, notamment, pour la physique mathématique (Poisson, Fourier, Cauchy), pour la géométrie (Monge, Poncelet) [5] et pour l'analyse (Cauchy). Ainsi, en ce qui concerne les nouvelles idées de Cauchy sur le calcul différentiel et intégral dans les années 1820, Klein affirme :

> « We find in them, step by step, the beginnings of modern arithmetized analysis. It must seem to us all the more remarkable that it was just these ideas that grew out of his teaching activity at the *École Polytechnique*, proving how unusually high were the standards in pure mathematics of the *Polytechnique*'s educational program even though it was directed mainly at practical applications. » [*Ibid.*, p. 78]

Cette image d'une harmonie entre un Cauchy inaugurant l'analyse moderne dans son enseignement en la fondant sur une base « arithmétique » (c'est-à-dire numérique), et une institution vouée aux sciences mathématiques, va s'imposer pour longtemps dans l'historiographie des mathématiques.

Dirk J. Struik [6], dans son ouvrage d'histoire générale des mathématiques *A Concise History of Mathematics* (1re éd., 1948 ; 4e éd., 1987), résume ainsi les nouveautés qui apparaissent, selon lui, au début du XIXe siècle, dans

---

5. « If Carnot's work already contains a vague presentiment of the direction in which modern geometry was to develop, then in Poncelet we find its great creator. He adopted Monge's and Carnot's ideas with the greatest brilliance and, conquering all difficulties, created a breakthrough. » [*Ibid.*, p. 73]

6. Voir la notice biographique sur Struik (1894-2000), rédigée par J. W. Dauben, dans [Dauben & Scriba 2002].

la nature des mathématiques et le statut des mathématiciens (spécialisation, professionnalisation), en les rattachant au contexte sociopolitique :

> « The French Revolution and the Napoleonic period created extremely favorable conditions for the further growth of mathematics. [...]
> The new mathematical research gradually emancipated itself from the ancient tendency to see in mechanics and astronomy the final goal of the exact sciences. [...] The specialist developed, interested in science for its own sake. The connection with practice was never entirely broken, but it often became obscured. A sharper division than in previous times between practitioners of "pure" and "applied" mathematics accompanied the growth of specialization. The mathematicians of the nineteenth century were no longer at royal courts or in the salons of the aristocracy. Their chief occupation no longer consisted in membership in a learned academy ; they were usually employed by universities or technical schools and were teachers as well as investigators. [...] Mathematicians began to work in specialized fields ; and while Leibniz, Euler, and d'Alembert, can be described as "mathematicians" (as *géomètres* in the eighteenth-century meaning of the word), we think of Cauchy as an analyst, of Cayley as an algebrist, of Steiner as a geometer » [Struik 1987, p. 141-142].

En particulier, il souligne le rôle de l'École polytechnique :

> « a school which soon developed into a leading institution for the study of general engineering and eventually became the model for all engineering and military schools of the early nineteenth century [...]. Instruction in theoretical and applied mathematics was an integral part of the curriculum. Emphasis was laid upon research as well as upon teaching. [...] ; many great French mathematicians were students, professors, or examiners at the Ecole Polytechnique » [*Ibid.*, p. 146].

Il insiste enfin sur deux autres critères opposant les mathématiques du XIX^e^ siècle à celles du XVIII^e^, la rigueur et la préoccupation pour les fondements :

> « Cauchy, along with his contemporaries – Gauss, Abel, and Bolzano – belongs to the pioneers of the new insistence on rigor in mathematics. The eighteenth century had been essentially a period of experimentation, in which results came pouring in with luxurious abundance. The mathematicians of this age had not paid too much attention to the foundation of their work [...]. The time had now arrived for a close concentration on the meaning of the results. [...] Cauchy gave the foundation of the calculus as we now generally accept it in our textbooks. » [*Ibid.*, p. 151]

Carl B. Boyer[7], dans son ouvrage *A History of Mathematics* (1re éd., 1968 ; 2e éd. révisée par Uta C. Merzbach en 1989), place un chapitre

7. Voir la notice biographique sur Boyer (1906-1976), rédigée par J. W. Dauben, dans [Dauben & Scriba 2002].

« Mathematicians of the French Revolution » entre les chapitres intitulés « The Age of Euler » et « The Time of Gauss and Cauchy ». Il souligne particulièrement le rôle de cette période de la Révolution française dans ce qu'il qualifie de « revolutions » en mathématiques au début du XIXe siècle :

> « This chapter will show that mathematicians of France at the time of the Revolution not only contributed handsomely to the fund of knowledge, but that they were in large measure responsible for the chief lines of development in the explosive proliferation of mathematics during the succeeding century. We are even tempted to add to the already impressive list of revolutions of the time two more : a "geometric revolution" and an "analytic revolution". » [Boyer 1968/1989, p. 524]

Morris Kline [8], dans son volumineux ouvrage *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, publié en 1972, n'aborde pas les thèmes relatifs aux aspects sociaux ou politiques mais souligne tout aussi fortement l'opposition entre les deux siècles, dans les diverses branches des mathématiques. Dans un chapitre charnière, « Mathematics as of 1800 », les mathématiques du XVIIIe siècle apparaissent essentiellement comme des outils pour résoudre des questions de physique :

> « Far more than in any other century, the mathematical work of the eighteenth was directly inspired by physical problems. In fact, one can say that the goal of the work was not mathematics, but rather the solution of physical problems ; mathematics was a means to physical ends. » [Kline 1972, p. 616]

Placée à la source de la motivation des travaux mathématiques, la réalité physique est aussi présentée comme garante de leur exactitude face au manque de rigueur des raisonnements :

> « The physical meaning of the mathematics guided the mathematical steps and often supplied partial arguments to fill in nonmathematical steps. [...] Finally, the physical correctness of the conclusions gave assurance that the mathematics must be correct. » [*Ibid.*, p. 617]

Ce constat concerne particulièrement l'analyse mathématique, présentée comme marquée par les manipulations algébriques formelles, le manque de précision des concepts et des preuves. Le début du XIXe siècle se caractériserait par une forte réaction à cette situation :

> « Several mathematicians resolved to bring order out of chaos. The leaders of what is often called the critical movement decided to rebuild analysis solely on the basis of arithmetical concepts. [...]
> Rigorous analysis begins with the work of Bolzano, Cauchy, Abel, and Dirichlet and was furthered by Weierstrass. » [*Ibid.*, chap. 40, p. 947-948]

---

8. Voir la notice biographique sur Kline (1908-1992), rédigée par J. W. Dauben, dans [Dauben & Scriba 2002].

Kline souligne de même l'existence de ruptures nettes au début du XIXe siècle en algèbre (chap. 25, 31) [9], en théorie des nombres (chap. 25, 34) [10] et en géométrie (chap. 35-36) [11].

DEUX COLLOQUES MARQUANTS

Une étape importante pour l'historiographie des mathématiques de la période considérée ici est la tenue de deux colloques en 1979, en Allemagne, dont les actes ont paru en 1981. Le premier [Mehrtens *et al.* 1981] est entièrement consacré à l'histoire sociale des mathématiques du XIXe siècle ; le second [Jahnke & Otte (éd.) 1981] porte plus généralement sur l'histoire sociale des sciences au début du XIXe siècle mais contient une grande partie dédiée aux mathématiques [12]. Le but affirmé de ces ouvrages est double : souligner la rupture épistémologique qui s'opère en mathématiques (ou en sciences en général) au début du XIXe siècle et montrer qu'elle est étroitement connectée à la rupture qui se produit au plan social et politique. Le changement en mathématiques est ainsi présenté comme lié à un véritable changement d'époque.

Dans son introduction de la première partie de [Mehrtens *et al.* 1981], Henk Bos présente clairement la problématique de l'ouvrage :

> « The first half of the nineteenth century was a period of great changes in politics, in commerce and industry, in the arts, and in religious, philosophical and scientific thinking. For mathematics as well it was a period of deep change, in views on mathematics as a whole, in ideas about its foundations and the nature of its principal concepts, and in the educational function of the

9. Cela concerne d'abord le théorème fondamental de l'algèbre : « Gauss's approach to the fundamental theorem of algebra inaugurated a new approach to the entire question of mathematical existence. » [Kline 1972, p. 599] Struik, parmi beaucoup d'autres auteurs, indiquait aussi : « The dissertation [of Gauss, 1799] gave the first rigorous proof of the so-called "fundamental theorem of algebra", which states that every algebraic equation with real coefficients has at least one root and hence has n roots. » [Struik 1987, p. 142] L'autre nouveauté soulignée [Kline 1972, p. 754-756] est la solution du problème de la résolubilité par radicaux de l'équation algébrique générale de degré $n \geq 5$ (Abel en 1824-1826, Galois en 1831).

10. « Up to the nineteenth century the theory of numbers was a series of isolated though often brilliant results. A new era began with Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae* which he composed at the age of twenty. » [Kline 1972, p. 813]

11. « In the early nineteenth century several great mathematicians decided that synthetic geometry had been unfairly and unwisely neglected and made a positive effort to revive and extend that approach. » [*Ibid.,* p. 834] Par ailleurs : « non-Euclidean geometry was the culmination of a long series of efforts in the area of Euclidean geometry. The fruition of this work came in the early nineteenth century during the same decades in which projective geometry was being revived and extended. However, the two domains were not related to each other at this time » [*Ibid.*, p. 861].

12. Plusieurs historiens des mathématiques ont participé aux deux colloques.

> discipline. New institutions for the pursuit and teaching of mathematics and the sciences were created, and older institutions were radically transformed. » [*Ibid.*, p. 3]

Dans le texte suivant, qui a servi d'introduction au colloque, D. J. Struik développe les thèses que l'on a rencontrées précédemment dans son ouvrage général d'histoire des mathématiques. On y retrouve l'idée d'un renouvellement des sciences mathématiques au début du XIXe siècle, caractérisé par le développement de la spécialisation [13], la transformation du statut social des mathématiciens, le changement des institutions [14] et, notamment, la création de l'École polytechnique [15]. Struik mentionne aussi l'ouverture du domaine de la physique mathématique sous l'impulsion de Fourier [16], puis insiste sur le critère de la rigueur :

> « The way the eighteenth century worked with a calculus without satisfactory foundation, with infinite series without satisfactory study of convergence and with the "paradoxes of infinity" in general, was found highly unsatisfactory. With the new rigor came new criteria for the convergence of series and new understanding of such concepts as continuity and function. We think of Cauchy, Gauss, Bolzano, Abel, Fourier, Dirichlet. » [*Ibid.*, p. 15]

S'interrogeant ici explicitement sur l'argumentation qui peut être fournie pour justifier l'affirmation d'une connexion entre la Révolution française et les nouvelles mathématiques, il répond alors :

> « This we can probably do by realizing that the new mathematics was only one aspect of the vigorous pioneering, renovation and rebellion that went on in almost all aspects of intellectual and artistic, literary, religious, moral and scientific thinking of Europe, wherever the armies of the republic and empire had brought the slogans of liberty, equality and fraternity to every nook and corner between Cork and St. Petersburg. [...] Thus the new mathematics of the period was only one aspect of that vigorous pioneering and rebellion that went on in almost all intellectual life in this period from 1789 to 1848, between the first and the third French Revolution. » [*Ibid.*, p. 10-11]

En fait, l'argument se réduit à l'affirmation d'un postulat, celui d'une synchronisation de toutes les composantes d'une société – incluant les recherches mathématiques –, à une même époque et particulièrement dans les phases de bouleversements révolutionnaires.

---

13. En particulier : « This was also the age of periodicals purely devoted to mathematics. » [Struik 1981, p. 19]

14. « The archaic Académie des Sciences was replaced by the Institut » [*Ibid.*, p. 9].

15. « Here entirely new fields of mathematics were opened. » [*Ibid.*]

16. « Fourier demonstrated the power of his trigonometric series in what may be called the opening up of mathematical physics » [*Ibid.*, p. 14].

Dans l'introduction de l'ouvrage [Jahnke & Otte (éd.) 1981], correspondant au second colloque, les éditeurs insistent sur le fait que le passage du XVIII^e au XIX^e siècle constitue un tournant pour toutes les sciences et tous les savoirs :

> « The relationship between scientific knowledge and empirical knowledge, between science and other cultural forms attains a particular relevance at a certain point in the dynamics of history. Foucault's case studies in the history of science illuminate this development admirably, especially the marked shift in his point of view when he was trying to cope with the problems of the situation around 1800. » [*Ibid.*, p. xvi]

La référence à Michel Foucault (*Les Mots et les choses* [1966] et *L'Archéologie du savoir* [1969]) qui apparaît à plusieurs reprises dans ces deux ouvrages de 1981 montre la volonté d'insérer les mathématiques ou les autres sciences dans le cadre d'une rupture radicale et globale entre les deux siècles, correspondant à un véritable changement d'époque (d'« épistémè » ou de « formation discursive » [17]).

Pour ce qui concerne les institutions d'éducation – la destruction des anciennes au cours de la Révolution française et l'établissement de nouvelles, avec le rôle central de l'École polytechnique –, les éditeurs reprennent essentiellement les thèses de F. Klein, en y référant explicitement [*Ibid.*, p. xx].

Dans la partie de l'ouvrage consacrée spécialement aux mathématiques au début du XIX^e siècle, Judith Grabiner résume ainsi l'opposition qu'elle voit entre les deux siècles :

> « Eighteenth-century calculus was characterized by powerful techniques and novel results, nineteenth-century calculus by clear definitions and rigorous proofs. Throughout the nineteenth century, men like Cauchy, Bolzano, Abel, Weierstrass, and Dedekind advocated increased rigor in analysis. [...]
> Eighteenth-century mathematicians, by contrast, are not noted for great contributions to the foundations of the calculus. The problems of most importance to eighteenth-century analysts were those which could be treated without paying much attention to the foundations of the calculus.
> These men drew no strict line between the calculus and its applications, between mathematics and mathematical physics. » [Grabiner 1981b, p. 311-312]

Elle avance les causes sociales et épistémologiques suivantes pour le changement d'attitude relativement aux fondements : « the requirements of an

17. Remarquons que, pour M. Foucault, les mathématiques constituent cependant une science à part : « les mathématiques, seule pratique discursive qui ait franchi d'un coup le seuil de la positivité, le seuil de l'épistémologisation, celui de la scientificité et celui de la formalisation » [Foucault 1969, p. 246]. Et, selon lui, ce franchissement se situe historiquement dès leur origine.

expanding scientific community, philosophical questions, the need to teach » [*Ibid.*, p. 325].

Dans le même ouvrage, Ivor Grattan-Guinness [18] aborde, quant à lui, la question de la physique mathématique en France [19] entre 1800 et 1835. Il y présente le premier quart du XIXe siècle comme une période marquée par des changements qualifiés de structurels [20], tant dans le domaine de la physique que dans celui des mathématiques :

> « Around 1800, the branches of physics which had received substantial mathematical treatment were terrestrial and celestial mechanics, and some aspects of optics. [...]
> During the next quarter of a century, both the physics and the mathematics expanded greatly. Heat diffusion, electricity and magnetism received sustantial mathematical as well as physical treatment, and the realm of optics was considerably extended. Similarly, the calculus was broadened by the accretion of new theories of the convergence of infinite series, complex variable and Fourier analysis, and greatly increased knowledge of some special functions and the theory of equations. For the rest of the century much work in both physics and mathematics was devoted to the extension and consolidation of the innovations made during these twenty-five years. » [Grattan-Guinness 1981, p. 349-350]

La naissance de la physique mathématique coïncide, en d'autres termes, avec un double mouvement de mathématisation et d'étude physique (« physical treatment ») de phénomènes restés hors de portée des mathématiques jusqu'au début du XIXe siècle. Comme chez F. Klein [21], nous retrouvons ainsi l'idée de conquête de nouvelles branches de la physique, distinctes de la mécanique, par les mathématiques autour de la borne 1800.

Avec ces deux ouvrages collectifs de 1981, le passage du XVIIIe au XIXe siècle est ainsi devenu un cas exemplaire de croisement entre l'histoire des mathématiques, l'histoire des sciences et l'histoire générale socio-politique. Dans le cadre du fort courant qui s'est manifesté, à partir des années 1980, pour désenclaver l'histoire des mathématiques, cette présentation a fait florès. Nous prendrons encore plusieurs exemples pour l'illustrer. Le premier témoigne, au travers de la naissance de la physique mathématique, de la présence de la thèse de la rupture dans un cadre historiographique plus large que celui de l'histoire des mathématiques.

---

18. On trouvera abondamment cités ici les travaux, particulièrement importants, de l'historien des sciences mathématiques anglais Ivor Grattan-Guinness (1941-2014), récemment disparu.

19. Il avait aussi exposé sur ce thème lors du premier colloque, dont la préface renvoie au présent article [Mehrtens *et al.* 1981, p. xi].

20. Dans la partie 3 de l'article, « Physics and Mathematics : A Similarity of Structural Change » [Grattan-Guinness 1981, p. 352-353].

21. Voir la note 4.

La physique mathématique et la thèse de la rupture radicale

Comme F. Klein avant lui, I. Grattan-Guinness présente, nous l'avons vu, la naissance de la physique mathématique comme l'un des changements marquant le passage du XVIIIe au XIXe siècle. En lien avec le phénomène de professionnalisation et la reconfiguration du paysage institutionnel impulsée par la Révolution française, et symbolisée par la naissance de l'École polytechnique, les mathématiques connaîtraient en effet deux évolutions majeures au début du XIXe, soulignées par le sous-titre « From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics » de ses *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840* [Grattan-Guinness 1990a] :

> « The 18th-century differential and integral calculus (including some special functions and integrals, and the summation of series) became subsumed under mathematical analysis, a general theory of the calculus, convergence of infinite series, and functions, using limits as the unifying concept. At the same time 18th-century mechanics was supplemented by the mathematisation of heat diffusion, electricity and magnetism and by considerable advances in the mathematisation of optics, to become a spectrum of disciplines which I call "mathematical physics". » [*Ibid.*, p. 34]

Outre la profonde transformation conceptuelle de l'analyse mathématique, le début du XIXe siècle se caractériserait ainsi par « the inauguration of mathematical physics » [22] qui constitue un changement dans le sens où elle coïncide avec l'extension de la mathématisation à un ensemble de phénomènes restés hors de portée des mathématiques avant 1800 – et donc distincts de ceux mathématisés dans le cadre de la mécanique au XVIIIe siècle [23]. Nous retrouvons sensiblement le même schéma chez John L. Greenberg, qui affirme :

> « Then, suddenly, whole new vistas opened up. Beginning in the late eighteenth century, mathematics was made to serve hitherto unimagined fields of physics and classes of problems outside mechanics. The formation of new scientific institutions in France during the Revolution and the Empire, accompanied by a reorganization of education, helped facilitate the expansion

22. [Grattan-Guinness 1990b, p. 314].

23. Dans son article « The Varieties of Mechanics by 1800 », I. Grattan-Guinness définit la physique (« physics ») du XVIIIe siècle comme une discipline distincte de la mécanique dans la mesure où elle demeure essentiellement expérimentale, et sans lien avec les mathématiques : « Around 1800 [physics] was a heavily experimental but largely nonmathematical discipine. [...] Physics overlapped with mechanics in some topics involving matter (for example, elasticity and gases), optics, and sound ; but even in these situations the (non)role of mathematics led to significant differences in concern. » [Grattan-Guinness 1990b, p. 316] C. C. Gillispie fait état d'une conception similaire du domaine de la physique au XVIIIe siècle : voir *infra*.

of mathematical physics beyond the Paris Academy and assured the French a corner on the field until at least 1830. » [Greenberg 1986, p. 77-78]

L'idée selon laquelle la naissance de la physique mathématique marquerait une rupture apparaît également en histoire des sciences, par exemple dans l'ouvrage que Charles C. Gillispie consacre aux rapports entre sciences et politique sous la Révolution et l'Empire, et dans lequel il marque plus clairement encore la nature du changement :

> « What distinguishes the writings to be considered [in mathematical physics], and many subsidiary contributions, is that the reasoning was mathematical and that [...] the findings are expressed in formulations of mathematical physics. The same cannot be said of any body of physics generated by a community of scientists prior to 1800 in France or to the late 1830s elsewhere. D'Alembert, to take an eminent example, would have regarded the phrase "mathematical physics", if not quite a contradiction in terms, at least as a conflation of unlike divisions of knowledge. The *Discours préliminaire* (1751) to the *Encyclopédie* distributes the sciences into two main branches, "Mathématiques" and "Physique générale et particulière". To the former belong geometry, arithmetic, and algebra, which d'Alembert calls "Pures", and also mechanics, astronomy, and geometric optics, which he designates as "Mixtes". All other knowledge of nature is "Physique", where the best to be expected is a "recueil raisonné", an organized collection of observations and experiments. » [Gillispie 2004, p. 675-676]

La rupture reposerait donc sur un bouleversement des rapports entre le domaine de la physique et celui des mathématiques au début du XIX^e siècle, un bouleversement incarné par la nouveauté que la physique mathématique constitue au regard de la stricte séparation qui prime entre la « Physique » et les « Mathématiques » [24] du XVIII^e d'après le plan d'organisation des connaissances proposé par d'Alembert dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie*.

Thomas Kuhn souligne aussi la rupture constituée par la mathématisation « à grande allure vers 1800 » des théories physiques qualitatives héritées du XVIII^e siècle :

> « Si ce n'est peut-être en optique, les publications scientifiques, qui, entre 1800 et 1825, formulent en termes pleinement mathématiques des objets jusqu'alors réservés à l'expérimentation, n'auraient pas pu être écrites deux décennies plus tôt, avant l'explosion de la mathématisation. » [Kuhn 1977/1990, p. 107]

---

24. Dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie* (t. I, 1751), d'Alembert oppose les « sciences physico-mathématiques » (ou « mathématiques mixtes ») à la « Physique générale et expérimentale » (p. vij), ou « Physique générale » (p. xvij). La « physique particulière » constitue en revanche une autre branche « qui étudie les corps en eux-mêmes, & qui n'a que les individus pour objet. [...] ; d'où résultent l'Anatomie, l'Agriculture, la Médecine, & leurs différentes branches » (*Ibid.*).

Ce changement s'appuie sur l'idée d'une remise en cause des « barrières, tant conceptuelles qu'institutionnelles » [*Ibid.*] qui priment encore à la fin du XVIII^e^ siècle entre ce que qu'il convient selon lui d'appeler les « sciences classiques » (mathématisées) et les « sciences baconiennes » (expérimentales et qualitatives)[25]. À la différence des auteurs précédents, T. Kuhn considère cependant ce mouvement de mathématisation des sciences baconiennes comme l'une des diverses facettes d'une évolution beaucoup plus large, celle d'une « seconde révolution scientifique » affectant l'ensemble des sciences pendant la première moitié du XIX^e^ siècle[26].

Textes de synthèse récents

Nous considérerons à présent deux exemples de textes de synthèse récents. Ce type de textes – ouvrages généraux d'histoire des mathématiques ou articles d'encyclopédie – constitue souvent un bon indicateur des représentations historiographiques courantes.

The Rainbow of Mathematics. A History of the Mathematical Sciences, publié en 1997 par I. Grattan-Guinness, est un ouvrage général d'histoire des mathématiques bien documenté, nourri des nombreux travaux personnels de l'auteur et de ceux qu'il a édités dans l'encyclopédie *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, parue en 1994. Le livre, organisé chronologiquement, propose une périodisation de l'histoire des mathématiques où la borne 1800 joue un rôle essentiel. Ainsi, après le chapitre 6, consacré à la période 1750-1800 et avant les chapitres 8, 9, 10 dédiés à la période 1800-1860, le chapitre 7, « Institutions and the profession after the French Revolution », fait figure de charnière pour marquer le changement radical entre les XVIII^e^ et XIX^e^ siècles, et en souligner les causes supposées ; il est ainsi présenté dans le chapitre d'ouverture :

> « In § 7 a survey is given of the new professional status of mathematics fostered in the early 19th century by the creation of new universities or equivalent institutions and the reinvigoration of certain old ones, and also a massive growth in publishing mathematics in books and journals. The French Revolution was the major single cause of change, and indeed France was by far the principal mathematical country between 1780 and 1830. » [Grattan-Guinness 1997, p. 4]

---

25. Cette terminologie est notamment reprise par I. Grattan-Guinness dans [1990a, p. 1278] et dans [1997, p. 352-353] cité ci-après.

26. Voir [Kuhn 1977/1990, chap. III et VIII]. Nous pourrions également mentionner la thèse de l'historien des sciences E. Bellone [1980] – citée par J. L. Greenberg [1986, p. 78] et I. Grattan-Guinness [1990a, p. 1294] –, qui présente, dans une optique différente de celle de T. Kuhn, le développement du domaine de la physique depuis le début du XIX^e^ siècle jusqu'à nos jours.

Ce chapitre 7 débute par une section significativement intitulée « A new *époque* : the Ecole Polytechnique ». Le rôle de la Révolution française dans ce changement d'époque est souligné : « After the Revolution of 1789, everything in France had to be changed, but it took a little time. Most of the educational institutions met their guillotine around 1793 » [*Ibid.*, p. 347]. Parmi les nouvelles institutions créées, l'École polytechnique est considérée comme la plus importante. I. Grattan-Guinness souligne le développement corrélatif de la professionnalisation : « This ensemble of institutions for research and teaching, and the opportunities thus provided for employment in both, gave a scientist the novel chance to be a truly professional person, with jobs paid for by the state » [*Ibid.*, p. 351]. Il note aussi les changements induits à partir de 1800 par la mathématisation de la physique, conçue jusqu'à la toute fin du XVIII^e comme un domaine essentiellement expérimental, celui des sciences « baconiennes », par opposition, selon la terminologie de T. Kuhn, aux sciences « classiques » :

> « Analysis and mechanics formed the bulk of the so-called "classical sciences". They stood in marked contrast to the "Baconian" sciences, in which experiment and observation were in the driving position and mathematics was modestly placed or even absent [...]. Partly for that reason, physics dit not have a very high reputation in either research or education in the late 18th century.
> This situation changed radically between 1800 and 1830, as major areas of physics came to be mathematicized : in chronological order, heat, physical optics, electrostatics [...] and magnetism, and the union of the last two in electromagnetism. » [*Ibid.*, p. 352-353]

L'apparition de journaux spécialisés en mathématiques au début du XIX^e siècle ainsi que l'accroissement du nombre de livres mathématiques publiés sont également mis en évidence.

On retrouve dans les trois chapitres suivants de l'ouvrage, consacrés à la période 1800-1860, les affirmations traditionnelles de nouveautés radicales : en géométrie (Monge, Poncelet...), en analyse (Fourier, Cauchy...), en théorie des nombres et algèbre (Gauss, Abel, Galois...), en physique mathématique (Fourier, Poisson, Laplace, Ampère...).

Considérons maintenant le chapitre « Mathematics » du quatrième volume, *Eighteenth-Century Science*, publié en 2003, de la collection *The Cambridge History of Science*. Ce texte de synthèse, rédigé par Craig Fraser, reprend des thèmes figurant dans les travaux antérieurs de l'auteur[27], en les rattachant davantage au contexte culturel et social. Il en ressort deux thèses essentielles. La première porte sur le statut des mathématiques au XVIII^e siècle et son lien supposé avec la pensée des Lumières :

27. Voir notamment [Fraser 1989].

> « Considered broadly, mathematical activity in the eighteenth century was characterized by a strong emphasis on analysis and mechanics. [...]
> The close relationship between mathematics and mechanics had a basis that extended deep into Enlightenment thought. » [Fraser 2003, p. 305]

Il justifie cette dernière affirmation par le fait que d'Alembert, dans le « Discours préliminaire » de l'*Encyclopédie*, classe les mathématiques dans la « science de la nature », en les séparant de la logique considérée comme une « science de l'homme ». Le contraste est ainsi marqué avec le XIX^e siècle où la spécialisation impliquera un développement propre des mathématiques :

> « The democratization of science that occurred in the nineteenth century, with the opening of scientific careers to a wide segment of society, was accompanied intellectually within each field by a rather narrow and proprietary specialization that was foreign to the spirit of inquiry in the age of Enlightenment. » [*Ibid.*, p. 306]

Une seconde thèse porte sur le contenu des mathématiques du XVIII^e siècle, caractérisé comme algébrique et formel : « Eighteenth-century confidence in formal mathematics was almost unlimited. » [*Ibid.*, p. 319] Ici aussi, Fraser fait le lien avec le contexte idéologique en parlant de l'« algebraic program of Enlightenment mathematics » [*Ibid.*, p. 325]. Plus précisément, cette caractérisation concerne l'analyse dans la seconde moitié du XVIII^e siècle :

> « It is important to appreciate the distinctive philosophical character of eighteenth-century algebraic analysis, understood within the larger historical and intellectual evolution of mathematical analysis. The algebraic calculus of Euler and Lagrange was rooted in the formal study of functional equations, algorithms, and operations on variables. The values that these variables received, their numerical or geometrical interpretation, was logically of secondary concern. » [*Ibid.*, p. 324]

Avec cette analyse « algébrique », la seconde moitié du XVIII^e siècle se différencierait donc à la fois de la période antérieure, dominée par la géométrie, et de l'analyse « arithmétique » du XIX^e siècle :

> « Lagrange's algebraic analysis should also be contrasted with the much more conceptual and intensional mode of reasoning that was characteristic of classical real analysis, the field that developed in the nineteenth century and became the foundation of the modern subject. » [*Ibid.*, p. 325]

Comme à de nombreuses reprises dans ce texte, le début du XIX^e siècle est alors présenté comme marquant l'apparition de la « modernité » en mathématiques. Fraser conclut d'ailleurs : « The transition from Euler and Lagrange to Cauchy and Weierstrass constituted a profound intellectual transformation in conceptual thought. » [*Ibid.*, p. 327]

On assiste ainsi à la construction historiographique d'une notion de mathématiques « des Lumières »[28], qui seraient marquées à la fois par une orientation utilitariste conduisant à sacrifier les mathématiques pures et par la domination d'une analyse algébrisée jouant le rôle d'un outil sans préoccupation de rigueur, mathématiques mises en opposition radicale avec les mathématiques autonomes et rigoureuses du XIXe siècle. C'est dans cette lignée que se place le dossier de la revue *ISIS* dont nous sommes partis.

1.2. La présentation historiographique standard

Des textes cités au § 1.1, s'étalant sur près d'un siècle, se dégage une présentation standard du passage du XVIIIe au XIXe siècle[29] : une rupture radicale et globale se produit dans un temps court autour de 1800, concernant aussi bien le contenu des mathématiques que leur place dans le champ des savoirs et le statut social des mathématiciens[30]. La liste des oppositions entre le XVIIIe et le XIXe siècle mises en avant peut varier d'un auteur à l'autre mais, dans tous les cas, la présentation de multiples ruptures supposées se produire de façon synchrone à ce moment précis de l'histoire marque la présence du modèle historiographique standard.

Reprenons les principales affirmations de ruptures à l'articulation des deux siècles que l'on a rencontrées dans les textes du § 1.1. Dans un profond mouvement de spécialisation, on passe alors de mathématiques considérées essentiellement comme des outils utiles dans l'étude du monde physique à des mathématiques développées pour elles-mêmes. Les mathématiques pures acquièrent ainsi leur autonomie et se caractérisent par une nouvelle exigence de rigueur, dans la définition des concepts, les démonstrations et le développement de l'étude des fondements. En même temps, le statut social des mathématiciens change, avec leur professionnalisation comme enseignants et chercheurs dans des écoles ou des universités et l'émergence de nouveaux modes d'échanges grâce à la création de journaux spécialisés. Les diverses sciences mathématiques sont aussi le théâtre de ruptures importantes dans leurs contenus. L'analyse « algébrique » formelle est rejetée au profit d'une analyse « arithmétique ». La théorie des nombres, marginale au XVIIIe, et l'algèbre des équations, dans l'impasse, subissent des

28. Pour une analyse critique de cette notion, voir [Gilain 2013].

29. Jeremy Gray [2004, p. 23-25] fait une description de ce qu'il appelle le « standard model » de l'histoire des mathématiques du XIXe siècle, dont des éléments recoupent notre propos bien que celui-ci porte cependant sur un objet différent.

30. Nous avons sélectionné des textes particulièrement représentatifs de cette présentation standard et dont l'influence a été importante. Cependant, il faut noter que cette vision a été partagée jusque récemment par la plupart des historiens des mathématiques (y compris les directeurs du présent ouvrage...).

mutations fondamentales. La géométrie, délaissée au XVIII^{e} siècle, connaît un renouveau avec, notamment, la création de nouvelles branches de géométrie pure. Le début du XIX^{e} siècle est enfin marqué par la naissance d'un domaine, celui de la physique mathématique, lié à la mathématisation d'un ensemble de phénomènes physiques restés hors de portée des mathématiques au siècle précédent. On voit que les ruptures ainsi présentées sont de diverses natures : scientifiques, épistémologiques ou sociales.

Si certains auteurs, comme M. Kline, décrivent ces changements en restant dans le cadre d'une histoire « internaliste », la plupart des historiens, on l'aura noté, relient leur affirmation d'une rupture radicale en mathématiques aux changements dans la société et, notamment, à la rupture sociopolitique de la Révolution française, dont on pourrait résumer l'impact de la manière suivante. La Révolution française opère une révolution dans l'éducation et, plus généralement, une révolution culturelle avec la démocratisation de l'accès aux savoirs, laquelle s'exprime par la création d'institutions d'enseignement et de recherche radicalement nouvelles. L'École polytechnique est l'emblème de ces changements [31] : elle donne aux mathématiques un rôle majeur dans la formation des ingénieurs et des officiers, ainsi que dans l'élaboration et la diffusion des sciences. Les mathématiciens deviennent à la fois enseignants et chercheurs, avec un double phénomène de professionnalisation et de spécialisation, ce qui conduit à renforcer le rôle des mathématiques dans leurs applications aux diverses sciences, mais aussi à développer les mathématiques pures, étudiées pour elles-mêmes, avec l'accent mis sur la rigueur. Il s'agirait ainsi d'une sorte de réaction en chaîne, les changements politiques et sociaux radicaux impliquant rapidement des changements scientifiques et épistémologiques radicaux.

Dans ce cadre, la description du passage du XVIII^{e} au XIX^{e} siècle est marquée par l'utilisation d'un abondant vocabulaire de la rupture, que ce soit pour les mathématiques en général ou pour des domaines particuliers : « analytic revolution » et « geometric revolution » [Boyer 1968/1989, p. 524], « great revolution in mathematical rigor » [Grabiner 1981a, p. 166], « Cauchy's revolution in rigour » [Dauben 1992, p. 72], « decisive turning point » [Jahnke & Otte 1981, p. 21], « quite different paradigm [32] » [Fraser 2003, p. 327], « the rebirth of mathematics » [Alexander 2006b, p. 720], « a new *époque* » [Grattan-Guinness 1997, p. 347], « a new era » [Kline 1972, p. 813].

Une autre manifestation du poids dans l'historiographie de la rupture radicale et globale entre les XVIII^{e} et XIX^{e} siècles est la fréquence de l'utilisation de la borne 1800 dans les diverses périodisations générales

---

31. Ce n'est cependant pas le cas chez Alexander [2010]. Voir plus loin dans le § 1.3.

32. Voir dans [Gillies 1992] une discussion sur l'applicabilité en histoire des mathématiques de ce concept proposé par Kuhn [1970/1972] pour penser les révolutions scientifiques.

proposées en histoire des mathématiques. Par exemple, dans l'encyclopédie *The Oxford Companion to the History of Modern Science* [Heilbron (éd.) 2003], l'article « Mathematics » est ainsi divisé en deux : « Mathematics to 1800 » et « Mathematics 1800 to the Present ». Cette deuxième partie, rédigée par I. Grattan-Guinness, s'ouvre d'ailleurs sur cette affirmation : « The initial changes in mathematics in the nineteenth century were consequences of the French Revolution. » [2003, p. 495] : Dans leur préface aux actes du Symposium sur « the History of Modern Mathematics », qui s'est tenu à New York en 1988, les éditeurs indiquent que leur ouvrage s'inscrit dans le cadre des recherches consacrées à « the modern era » de l'histoire des mathématiques, c'est-à-dire, pour eux, « the period roughly spanned by the publication of Gauss's *Disquisitiones arithmeticae* in 1801 to the advent of high-speed electronic computers around 1950 » [Rowe & McCleary 1989, p. xi]. Cette borne 1800, loin de marquer seulement la séparation entre deux siècles, correspond ainsi souvent à une volonté de délimiter l'avènement d'une nouvelle époque, celle de la « modernité » mathématique [33].

1.3. Difficultés de la présentation standard

Quand on considère les critères utilisés à l'appui de la présentation standard, on peut constater non seulement des variations mais aussi des contradictions entre les divers historiens voire chez un même auteur. Ces incohérences nous paraissent révélatrices des difficultés de cette présentation de l'évolution des mathématiques entre le XVIII^e et le XIX^e siècle.

Nous considérerons ici plusieurs exemples reflétant quatre types de difficultés, qui concernent : le rattachement des mathématiciens à l'une ou l'autre période, la caractérisation sociale et culturelle de la rupture entre les deux siècles, la temporalité des ruptures dans d'autres pays européens que la France et, enfin, l'articulation entre le schéma de mise en opposition des mathématiques des deux périodes et la naissance de la physique mathématique au début du XIX^e siècle.

Commençons par la question des acteurs et remarquons que, suivant le type d'argument mis en avant, tel mathématicien peut être classé parmi les « anciens », c'est-à-dire ceux du XVIII^e siècle, ou parmi les « modernes », c'est-à-dire ceux du XIX^e siècle.

Joseph Fourier est considéré par beaucoup d'historiens comme l'un des principaux représentants du renouveau de l'analyse, de la rupture avec

33. On peut ajouter que la récente « International Conference on the History of Modern Mathematics » qui s'est tenue en Chine, en 2010, avait pour thème *Cultures and elements of practices in mathematics, 1800-1930*.

l'analyse algébrique formelle, et l'un des créateurs de la physique mathématique au début du XIX^e siècle[34]. Par exemple, Struik souligne l'importance des travaux de Fourier, non seulement pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la chaleur à l'aide des séries trigonométriques mais aussi pour l'émergence de la rigueur comme caractéristique essentielle des mathématiques du XIX^e siècle :

> « It [les séries de Fourier] also received attention on its own merits. Its manipulation by Fourier fully opened the question of what to understand by a "function". This was one of the reasons why nineteenth-century mathematicians found it necessary to look more closely into questions concerning rigor of mathematical proof and the foundation of mathematical conceptions in general. » [Struik 1987, p. 150]

Si Fourier est ainsi classé parmi les « modernes » sur la base de ses apports scientifiques, il n'en est pas toujours de même lorsque sont considérés les aspects épistémologiques. Struik lui-même, à quelques pages d'intervalle, après avoir identifié le développement de la spécialisation, avec la division entre mathématiques « pures » et mathématiques « appliquées », comme l'une des caractéristiques du passage au XIX^e siècle[35], ajoute la note suivante, où il associe la pratique de Fourier, liant intimement l'analyse à l'étude des phénomènes physiques, à celle d'un mathématicien du XVIII^e siècle :

> « The difference in approach [entre les deux siècles] found its classical expression in the remark by Jacobi on the opinions of Fourier, who still represented the utilitarian approach of the eighteenth century : "Il est vrai que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombre vaut autant qu'une question du système du monde." » [Struik 1987, p. 141, n. 1].

Fourier apparaît alors comme classé parmi les « anciens », face à la modernité représentée par Jacobi, en 1830[36].

---

34. [Klein 1926/1979, p. 63-65 ; Kline 1972, p. 671-681 ; Struik 1981, p. 14, et 1987, p. 149-150 ; Grattan-Guinness 1981, p. 350-351, et 1997, p. 454-458].

35. Voir la citation *supra* au § 1.1 [Struik 1987, p. 141-142].

36. On retrouve cet argument opposant Fourier à Jacobi chez Alexander : « Therein lay the difference between Fourier and Jacobi, between the French and German mathematical traditions, and, above all, between the older generation of Enlightenment mathematicians and the new generation of Jacobi, Abel, and Galois. For Fourier, mathematics is derived from the world, and its goal is to reveal the hidden structure of the world and describe it as really is. [...] For Jacobi, in contrast, the physical structure of the world is entirely irrelevant for mathematics. » [2010, p. 179]

Lagrange constitue une autre figure caractéristique d'une telle ambivalence. Sur le plan scientifique, il est généralement considéré comme le symbole de l'analyse algébrique formelle du XVIIIe siècle, cible principale de la critique que fait Cauchy, au nom de la rigueur, contre la « généralité de l'algèbre », dans l'introduction de la première partie de son *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (1821). C. Fraser insiste sur cet aspect en considérant que Lagrange partage avec Euler une « conception significantly different from the modern one, with its origins in Cauchy's early 19th-century work » [Fraser 1989, p. 318][37].

Dans le dossier d'*ISIS*, A. Alexander choisit, quant à lui, d'opposer Lagrange à Abel pour illustrer la rupture entre le XVIIIe et le XIXe siècle en ce qui concerne la notion de rigueur : « The correct results, which for Lagrange were both the purpose of analysis and the ultimate guarantee of its viability, were for Abel merely a puzzling aberration. For Abel, a mathematical discipline that was not systematic and rigorous was hardly worthy of the name. » [Alexander 2006b, p. 721]

En se plaçant sur un plan sociologique, on peut toutefois considérer que Lagrange satisfait à un critère essentiel de modernité : il enseigne dans les nouvelles institutions créées au moment de la Révolution française – l'École normale de l'an III et, surtout, l'École polytechnique, institution à laquelle il participe activement pendant de nombreuses années. Les ouvrages où il a présenté sa conception de l'analyse – *Théorie des fonctions analytiques* (1797) et *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801, 1806) – sont d'ailleurs issus de ses cours à l'École polytechnique. Dans le même sens, on remarque que Struik commentant la *Mécanique analytique*, grand ouvrage de Lagrange publié en 1788, peut affirmer : « Lagrange's book was a triumph of pure analysis. The author so far as to stress in the preface : *On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage, seulement des opérations algébriques*. It characterized Lagrange as the first true analyst. » [Struik 1987, p. 134] Autrement dit, si l'on considère la question de la spécialisation, autre critère de modernité souvent avancé, notamment par Struik lui-même dans un passage figurant quelques pages plus loin[38], Lagrange, « analyste » comme Cauchy, apparaît comme un mathématicien du XIXe siècle et non plus du XVIIIe...

Le cas de Gauss mérite lui aussi une attention toute particulière de ce point de vue. Klein lui consacre un long premier chapitre où sont mises en évidence la profondeur et la nouveauté de ses travaux dans les diverses sciences mathématiques. Cependant, d'un autre côté, il affirme que « Gauss was thoroughly an 18th century type » [Klein 1926/1979, p. 5], car il ne satisfait pas socialement aux caractéristiques modernes du XIXe siècle :

---

37. Voir aussi les citations de C. Fraser présentées à la fin du § 1.1.

38. Voir la citation *supra* au § 1.1 [Struik 1987, p. 142].

> « For him, scientific communication consisted of a copious correspondence with a few select men ; the classical form of his works does not distinguish him from any of his forerunners. To these traits is joined a declared aversion to teaching » [*Ibid.*].

Klein n'hésite pas alors à formuler un paradoxe révélateur des difficultés de la présentation standard :

> « Here he [Gauss] showed himself more conservative than the older Monge who anticipated the development of the 19th century with his founding of the *Ecole polytechnique* (1794). But while Monge's circle of mathematical ideas remained within the 18th century, it was Gauss who truly inaugurated the new age with his totally modern thoughts. » [*Ibid.*]

Dans son histoire des mathématiques, Struik fait état de la même ambivalence au sujet du savant, présenté comme une « majestic figure » surplombant « the dividing line between eighteenth- and nineteenth-century mathematics » et dont les différentes facettes en font un mathématicien pouvant être rattaché aux deux périodes :

> « His comparative isolation, his grasp of "applied" as well as "pure" mathematics, his preoccupation with astronomy and his frequent use of Latin have the touch of the eighteenth century, but his work breathes the spirit of a new period. » [Struik 1987, p. 142]

Cependant, beaucoup d'auteurs classent sans restriction Gauss parmi les mathématiciens du nouveau siècle sans aborder ces contradictions. Joseph Dauben, par exemple, présente d'abord la conception standard de la rupture entre XVIII[e] et XIX[e] siècle en articulant fortement les arguments sociologiques et scientifiques :

> « In the nineteenth century foundational questions became increasingly of interest and importance, in part for reasons that concern the sociology of mathematics involving both matters of institutionalization and professionalization. As mathematicians were increasingly faced with *teaching* the calculus, questions about how to define and justify limits, derivatives, and infinite sums, for exemple, became unavoidable. » [Dauben 1992, p. 73-74]

Le cours d'analyse de Cauchy à l'École polytechnique sert d'exemple à cette affirmation de Dauben, qui ajoute :

> « Cauchy was not alone, however, in his concern for treating mathematics with greater conceptual rigour [...]. Others, like Gauss and Bolzano, were concerned also with such problems as treating convergence more carefully, especially without reference to geometric or physical intuitions. » [*Ibid.*, p. 74]

Mais, précisément, Gauss et Bolzano n'ont pas enseigné les mathématiques et ne satisfont pas au critère sociologique essentiel posé au départ comme caractéristique de la rupture entre les deux siècles [39]. La conjonction de deux éléments donnés à l'appui de la présentation standard – professionnalisation des mathématiciens comme enseignants et nouvelle rigueur en l'analyse –, présente chez Cauchy, ne l'est ni chez Gauss ni chez Bolzano.

Ainsi, selon le critère privilégié par l'historien, tel mathématicien apparaît tantôt en amont et tantôt en aval de la rupture supposée entre le XVIII^e et le XIX^e siècle [40].

L'argument sociologique du changement radical de statut des mathématiciens entre le XVIII^e et le XIX^e siècle est, on l'a vu, l'un des critères importants donné à l'appui de la présentation standard. Cependant, si ce changement est généralement présenté comme lié au phénomène de spécialisation scientifique et d'autonomisation des mathématiques pures, les différences peuvent être considérables entre historiens pour ce qui est de la traduction sociale de ce phénomène. Dans le dossier d'*ISIS*, Alexander explicite ainsi sa conception du tournant :

> « Enlightenment mathematicians were literally "men of the world" – intellectually, professionally, and personally. [...]
> Things were very different, however, in the nineteenth century, when mathematics existed in a universe separate from our own, with its own rules and its own strange realities. Mathematicians now were not those with a special and deep understanding of our own world, but those unaccountably gifted with privileged access to an alternative and higher reality. The mathematician was, in this, rather like the Romantic poet » [Alexander 2006b, p. 725-726].

Pour lui, la rupture en mathématiques dans cette période correspond à la rupture culturelle entre les Lumières et le Romantisme et, dans le livre qu'il a publié après avoir dirigé le dossier d'*ISIS*, il explicite son point de vue en avançant que l'École polytechnique doit, en fait, être rattachée au courant des Lumières :

> « The École polytechnique, an engineering school where advanced mathematics was studied for the express purpose of using it in the natural world, was the institutional embodiment of this Enlightenment view. » [Alexander 2010, p. 138]

---

39. C. Maigné et J. Sebestik soulignent ainsi, dans leur introduction aux premiers écrits de Bolzano : « En mathématique, Bolzano travaillait seul, loin de Prague, sans pouvoir vérifier ses théorèmes et ses démonstrations par l'enseignement et par la critique de ses pairs. » [2010, p. 60]

40. Un même savant peut être parfois considéré comme appartenant à des périodes historiques différentes en fonction de l'évolution de son œuvre, mais de telles périodisations biographiques n'apparaissent pas dans les appréciations des historiens présentées ci-dessus.

Selon Alexander, les nouveaux mathématiciens typiques sont ceux qui sont en rupture par rapport aux institutions, notamment Abel, Galois, Bolyai et... Cauchy [41] :

> « The new mathematics practiced by Cauchy, Galois, and Abel did not take over the academic field overnight. In France, the established center of mathematical learning, mathematics was for decades to come dominated by graduates of the École polytechnique, who carried on the Enlightenment tradition of applied mathematics into the nineteenth century. [...] It was in Germany that the new mathematics found its true home. » [Alexander 2010, p. 265]

On voit ainsi que l'adoption de la même conception d'une dichotomie entre le XVIII^e^ et le XIX^e^ siècle peut recouvrir des arguments historiques contradictoires, conduisant à des déplacements importants des lieux et des temps où est censée se situer la rupture essentielle.

En lien avec cette même difficulté, la présentation standard de la rupture entre le XVIII^e^ et le XIX^e^ siècle soulève aussi la question de sa cohérence avec les changements observés dans le développement des mathématiques hors de France.

Pour plusieurs auteurs, la rupture qui affecte les mathématiques françaises au tournant des deux siècles constitue un stimulus essentiel à l'origine des changements qui touchent les mathématiques dans d'autres espaces européens. Ce stimulus peut se traduire sous différentes formes : par exemple, l'influence directe de la Révolution française [42], les conséquences du trauma de l'invasion napoléonienne [43] pour la Prusse, ou la réaction de certains pays à la domination de la France en mathématiques [44]. La situation industrielle ou idéologique particulière d'un pays peut toutefois aussi favoriser ou freiner le changement : « England, the heart of the Industrial Revolution, remained mathematically almost sterile for several decades. Mathematics progressed most healthily in France and somewhat later in Germany, countries in which the ideological break with the past was most sharply felt » [Struik 1987, p. 141]. La prise en compte des contextes scientifiques, institutionnels et socioculturels locaux induit de même, selon

---

41. Alexander utilise ici, au profit d'une thèse très discutable (voir *infra* § 2.2), les travaux historiques publiés à partir des années 1980 qui ont mis en évidence les oppositions existant entre Cauchy et les instances de l'École polytechnique [Gilain 1989 ; Belhoste 1991].

42. « The French Revolution also in this domain showed its emancipating influence. » [Struik 1981, p. 15]

43. « It was the trauma of the Napoleonic invasion that woke Prussia up from its selfindulgence » [*Ibid.*, p. 14].

44. « Reactions to French dominance in science began to come from other countries », notamment la Prusse et la Grande-Bretagne [Grattan-Guinness 1997, p. 356].

le pays, ou le domaine concerné, des décalages temporels significatifs par rapport à la situation française et la borne temporelle (l'année 1800 ou la Révolution française selon les cas) qui lui est associée : la rupture essentielle pour les mathématiques allemandes aurait par exemple lieu dans le courant des années 1820 selon plusieurs auteurs [45], et dans les années 1830 pour ce qui concerne la naissance de la physique mathématique [46].

Au-delà de ces variations et décalages chronologiques, l'étude de certains pays révèle parfois aussi des contradictions manifestes. À la fin de son article consacré aux mathématiques du XVIIIe siècle, dans lequel il défend la présentation standard du tournant entre les deux siècles (voir § 1.1), C. Fraser ajoute une partie sur la situation en Grande-Bretagne, introduite en ces termes :

> « The algebraic program of Enlightenment mathematics was taken up and extended by several English figures of the early nineteenth century. Although these researches fall somewhat outside the period of this essay, they are worthy of note here as a direct continuation of what was primarily an eighteenth-century development. The appeal of algebraic analysis to the English was due in considerable part to a reaction against the prevalent geometric synthetic spirit of British mathematics. » [Fraser 2003, p. 325]

Les travaux des mathématiciens britanniques du premier XIXe siècle sont ainsi présentés comme se situant dans la continuité des travaux français du second XVIIIe. Si une rupture est signalée en Grande-Bretagne au début du XIXe siècle, c'est avec les mathématiques britanniques du XVIIIe siècle dominées par la géométrie. Ce cas n'est donc pas compatible avec les caractéristiques de la présentation historiographique standard des mathématiques au début du XIXe siècle, notamment avec le critère de rupture consistant à considérer l'analyse « algébrique » formelle comme une caractéristique des « mathématiques des Lumières ». La présentation standard n'a pas ici le caractère universel affirmé par ailleurs [47].

Les difficultés attenantes à la présentation standard de la rupture entre les deux siècles sont aussi particulièrement prégnantes lorsque l'on se penche sur la façon dont certains des critères associés à cette présentation s'articulent avec le problème de l'application des mathématiques entre 1750

45. [Struik 1981, p. 14-15 ; Grattan-Guinness 1997, p. 356-357].

46. [Klein 1926/1979, p. 203 ; Grattan-Guinness 1997, p. 437].

47. On observe un paradoxe du même type en ce qui concerne l'Allemagne. N. Jahnke indique en effet que l'analyse algébrique, telle qu'héritée de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (1748) et développée par l'école combinatoire de Hindenburg à la fin du XVIIIe siècle, devient la base de l'enseignement des mathématiques dans les lycées de Prusse après 1810 : « In the wake of Humboldt's educational reforms, algebraic analysis became the scientific background for the mathematical syllabus of the Gymnasium [...] because it was seen as an *elementary model of pure mathematics*. » [Jahnke 1993, p. 279]

et 1850. Deux tendances très différentes se font jour en terme de spectre d'étude dans la littérature précédemment passée en revue. Certains historiens, comme C. B. Boyer, M. Kline, J. L. Richards ou A. R. Alexander, se focalisent sur le seul développement des mathématiques pures pour le premier XIXe siècle. D'autres historiens, comme F. Klein, I. Grattan-Guinness, ou C. C. Gillispie, intègrent au contraire la question de l'application des mathématiques (et notamment de la mathématisation du monde physique) dans leur façon d'approcher l'histoire des mathématiques au cours de cette période. Ce dernier angle d'étude, plus large, conduit notamment à l'apparition d'un critère de rupture absent des travaux du premier groupe d'historiens : la naissance de la physique mathématique après 1800. Il est intéressant de noter que ces variations ne sont pas sans conséquence sur l'appréhension d'un autre critère quasi unanimement défendu, quant à lui, chez les deux groupes d'auteurs : celui d'une mise en opposition de mathématiques fondamentalement motivées par l'étude du monde physique au XVIIIe, avec les mathématiques autonomes et développées pour elles-mêmes du XIXe siècle. Chez ceux qui adoptent un angle d'étude plus large, la question du développement de la physique mathématique paraît en effet conduire à des éléments de continuité parfois incohérents avec ce dernier critère de rupture.

Tel est le cas de F. Klein, selon lequel la physique mathématique continue à entretenir des liens étroits avec les mathématiques pures dans le courant du premier XIXe siècle malgré le mouvement de spécialisation qui émerge simultanément au début de la période (et conduit à une séparation entre mathématiques pures et mathématiques appliquées [48]) : « Among applied subjects, mathematical physics claims particular interest, since it has maintained the most lively reciprocity with pure mathematics » [*Ibid.*, p. 203]. Si la physique mathématique possède ainsi toute sa place au sein de l'histoire des mathématiques de cette période [49], les innovations effectuées dans ce domaine à l'École polytechnique (par Poisson, Fourier et Cauchy) entre 1800 et 1830 ne vont pas, par ailleurs, sans emprunter certaines méthodes aux mathématiques mixtes (astronomie et mécanique) du second XVIIIe siècle :

48. « Mathematics separated from astronomy, geodesy, physics, statistics, etc. » [*Ibid.*, p. 3]

49. F. Klein consacre un tiers du chapitre I de son ouvrage [1926/1979], sur Gauss, aux travaux du savant en mathématiques appliquées (« Angewandte Mathematik » dans le texte original allemand de 1926, « applied mathematics » dans la traduction anglaise de 1979), un tiers du chapitre II, dédié aux mathématiques françaises entre 1800 et 1830, aux travaux de mécanique et de physique mathématique, ainsi que l'intégralité de son chapitre V à la mécanique et la physique mathématique en Allemagne et en Angleterre entre 1830 et 1880.

> « The period we are considering showed the effects of that great astronomical epoch, the 18th century, which found its classic formulation in the works of Lagrange and Laplace. Of significant influence were the first successful attempts of Laplace to apply astronomical methods to the behavior of physical bodies considered as aggregates molecules [...]. Then, of course, there was the influence of Euler and Lagrange in the direction of the "phenomenological interpretation" of physical events. » [*Ibid.*, p. 62]

Quoique marquant une rupture avec le XVIIIe siècle, le développement de la physique mathématique au début du XIXe mobiliserait donc certains héritages du siècle précédent, et notamment de la mécanique. Le titre même de la partie correspondante, « Mechanics and Mathematical Physics » [*Ibid.*], sous-tend clairement cette idée.

Compte tenu de la richesse et du spectre d'étude particulièrement large qui les caractérisent, les travaux d'I. Grattan-Guinness sur le développement de l'analyse et de la physique mathématique au XIXe siècle, en particulier dans ses *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840* [Grattan-Guinness 1990a], constituent un apport important dans l'historiographie des mathématiques pour cette période. L'historien s'appuie en particulier sur une étude approfondie du développement de la mécanique à la fin du XVIIIe, dont il propose une classification en cinq branches (mécanique des solides et des fluides, mécanique céleste, mécanique terrestre, mécanique des ingénieurs, mécanique moléculaire) soumises à l'influence de trois traditions dominantes à la fin du siècle (newtonienne, variationnelle, et une dernière liée à l'ingénierie) [50]. L'étude qu'il donne dès lors pour le premier XIXe siècle montre clairement la persistance de plusieurs de ces branches et traditions et, ce faisant, l'existence de multiples continuités entre les deux périodes. Quoique l'historien défende, nous l'avons vu, plusieurs des critères associés au modèle standard, sa perspective d'étude, particulièrement attentive à la question du devenir et des modes de développement des mathématiques appliquées dans les premières décennies du XIXe, le conduit finalement à une présentation singulièrement différente de celles des autres historiens, incompatible avec certains des critères avancés pour justifier la mise en opposition entre deux types radicalement différents de mathématiques pour l'avant et l'après 1800 :

> « From around the middle of the [19th] century pure mathematics rose and rose in prominence until it has become the dominating part of the profession [...] : applied mathematicians have to be other people [...]. This has had its effect on the history of mathematics, where work on pure mathematics (of many periods) is pursued out of all proportion to their importance at those times. To understand the 19th century, it will be essential to place mechanics, engineering and mathematical physics at the centre of the stage, at least for

50. Voir [Grattan-Guinness 1990a, p. 35 ; 1990b ; 1994, vol. 2, p. 969-970 ; 1997, p. 303].

> the first decades and substantially there for all later periods, both for France and for all other countries. » [Grattan-Guinness 1990a, p. 1304]

Le mouvement d'autonomisation des mathématiques pures vis-à-vis des mathématiques appliquées ne s'effectuerait donc que très progressivement au cours du siècle, nécessitant ainsi de redonner toute leur place aux secondes – qu'elles soient nouvelles, comme la physique mathématique, ou héritées du siècle précédent, comme la mécanique et les mathématiques de l'ingénieur – dans l'histoire des mathématiques du premier XIXe siècle, et notamment de ses trois premières décennies.

Nous venons, au travers de ces différents exemples, de passer en revue plusieurs types de difficultés illustrant les incohérences qui peuvent se manifester chez les historiens, entre l'idée de mise en opposition des mathématiques des deux siècles, les critères qui y sont associés, et leur traduction effective dans les récits historiques proposés. Nous avons ainsi constaté que la traduction sociale d'un critère de la présentation standard (le phénomène de spécialisation et d'autonomisation des mathématiques pures) peut conduire à des présentations historiques contradictoires (École polytechnique héritière de l'Ancien Régime versus symbole de nouveauté). Un critère de rupture peut encore, chez un même historien, se trouver simultanément affirmé à l'échelle globale et contredit dans un espace culturel et social particulier (exemple de la Grande-Bretagne perpétuant l'analyse algébrique formelle du XVIIIe siècle). Inversement, un spectre d'étude plus large (études des mathématiques pures et des mathématiques appliquées) entraîne l'existence d'un critère de rupture spécifique (naissance de la physique mathématique) en même temps que la remise en question de certains autres aspects de la présentation standard de la rupture entre les deux siècles (spécialisation progressive versus liens étroits entre mathématiques pures et appliquées dans les premières décennies du XIXe). Les mathématiciens de l'époque ne se laissent pas plus facilement classer entre les deux périodes et les caractéristiques des mathématiques qui y sont respectivement attachées selon la présentation standard, ce qui conduit ainsi à de nombreuses présentations contradictoires selon le critère considéré.

Toutes ces incohérences sont la marque que la présentation standard de la rupture entre les deux siècles concentre trop d'éléments d'opposition à la fois sur un temps trop court, dans un espace culturel et scientifique trop complexe et dans un cadre mathématique trop large. La périodisation présupposée par ce mode de présentation et les critères de natures très différentes (scientifiques, épistémologiques, sociales) qui l'accompagnent et la justifient ne parviennent pas à rendre compte de l'ensemble des facettes de l'histoire des mathématiques pour cette période.